Recupero di An. Mat. II (secondi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica del 29–9–07 A.A.2006/2007

Si risponda alle domande di seguito al testo. Lo svolgimento per esteso dei calcoli (sempre in bella) va allegato al compito. **Comporta una penalizzazione non scrivere nelle zone indicati i calcoli richiesti ma riportarli solo nella bella o sulla brutta che comunque va cnsegnata solo se strettamente necessario**

• Chi recupera tutto il programma di analisi II (secondi 5 crediti) svolga tutti gli esercizi . I punteggi sono quelli scritti nel formato "`macchina da scrivere`". Qui rientrano coloro che devono sostenere complementi. Si hanno 150 minuti di tempo

• Chi recupera solo la SECONDA PARTE di analisi II (secondi 5 crediti) svolga l'esercizio 2). I punteggi sono nel formato **grassetto**. Si hanno 100 minuti di tempo.

• Chi recupera analisi II (10 CREDITI) svolga gli esercizi:
la **prima, seconda** e **quinta** domanda dell'esercizio 1) di questo compito
le **prime due domande** dell'esercizio 2) di questo compito
La **Prima domanda** dell'esercizio **1)** e la **Terza domanda** dell'esercizio **2)** del compito sui primi 5 crediti.
Si hanno 210 minuti di tempo. I voti sono *scritti in italico*

Problema n.1 Sia data la funzione complessa $f(z) = \dfrac{1}{z^4-1}$

Prima domanda (`1`) – (*1*) Si trovi l'insieme in cui è olomorfa

R.: tutto **C** tranne i punti $z = \pm 1, \pm i$

Seconda domanda (`5`) – (*4*) Si determini lo sviluppo di Laurent centrato in due a scelta delle singolarità e se ne determini il raggio di convergenza.
Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

R.: Bisogna scomporre la funzione (questo è un punto sul quale gli studenti hanno faticato molto essendosi avventurati in una scomposizione in fratti semplici che comportava la risoluzione di un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite) $f(z)$. Sia $f(z) = \dfrac{A}{z+i} + \dfrac{B}{z-i} + \dfrac{C}{z-1} + \dfrac{D}{z+1}$ da cui, ad esempio, $A = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{z+i}{z^4-1} = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{(z+i)'}{(z^4-1)'} = \lim\limits_{z\to -i} \dfrac{1}{4z^3} = \dfrac{1}{4i}$. Gli altri casi sono analoghi e quindi si ottiene $f(z) = \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{z+i} - \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z+1}$. Scriviamo qui tutti gli sviluppi di Laurent.

Sia $z = 1$ la prima singolarità prescelta.
La funzione è scrivibile come $f(z) = \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{1+i}\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{1+i}} - \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{1-i}\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{8}\dfrac{1}{1+\frac{z-1}{2}}$. Lo sviluppo di Laurent è $f(z) = \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{1+i}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(1-z)^k}{(1+i)^k} + \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{i-1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z-1)^k}{(i-1)^k} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(1-z)^k}{2^k}$ e la serie converge chiaramente per $0 < |z-1| < \sqrt{2}$

Sia $z = -1$ la seconda singolarità . Otteniamo $f(z) = \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{i-1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z+1)^k}{(1-i)^k} + \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{i+1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z+1)^k}{(1+i)^k} - -\dfrac{1}{8}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z+1)^k}{2^k} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{z+1}$

Sia $z = i$ la terza singolarità . Otteniamo $f(z) = \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{2i}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z-i)^k}{(-2i)^k} - \dfrac{1}{4i}\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{i-1}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z-i)^k}{(1-i)^k} - \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-i}\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{(z-i)^k}{(i-1)^k}$

$$f(z)=\frac{1}{4i}\frac{1}{z+i}-\frac{1}{4i}\frac{-1}{2i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^k}{(2i)^k}-\frac{1}{4}\frac{1}{1+i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^k}{(i+1)^k}-\frac{1}{4}\frac{1}{1-i}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(z+i)^k}{(i-1)^k}.$$

Terza domanda (3) Si trovi lo sviluppo di Taylor della funzione $f(z)$ centrato in $z=0$ e se ne trovi il raggio di convergenza
Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

R.: $f(z)=-\sum_{k=0}^{+\infty}z^{4k}$. Naturalmente se si agisse allo stesso modo sulla funzione scritta come $f(z)=\frac{1}{4i}\frac{1}{z+i}-\frac{1}{4i}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}-\frac{1}{4}\frac{1}{z+1}$, semplificando si otterrebbe la stessa serie. Il raggio di convergenza è chiaramente 1.

Quarta domanda (3) Si determini il residuo nel punto all'infinito e si calcoli l'integrale esteso alla circonferenza di centro $z_0=0$ e raggio pari a 2.
Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

Lo sviluppo intorno al punto all'infinito dà $\sum_{k=0}^{+\infty}z^{-4(k+1)}$. Converge per $|z|>1$ ed il residuo è zero. Tra l'altro $Resf(i)+Resf(-i)+Resf(1)+Resf(-1)=0$

Quinta domanda (3) – (*3*) Si determini l'integrale della funzione $\frac{z}{\sin(z^2)-z^2}\frac{1}{z^4-1}$ esteso alla circonferenza di raggio 1 e centro l'origine.
(*Osservazione.* L'integrale esteso alla circonferenza di raggio 1 è incompatibile con il fatto che essa incontra la due singolarità ±1. Qualunque circonferenza di raggio più piccolo va bene.
Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile**. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate.

La funzione è riscrivibile come $f(z)=\frac{z^6}{\sin z^2-z^2}\frac{1}{z^5}\frac{1}{z^4-1}=\frac{z^6}{-\sin z^2+z^2}\sum_{k=0}^{+\infty}z^{4k-5}$. La funzione $\frac{z^6}{\sin z^2-z^2}$ analitica in $z=0$. Ha quindi un polo di ordine 1 nell'origine e il cui residuo è 6. Se la circonferenza è percorsa in senso antiorario, l'integrale è $12\pi i$.

Problema n.2 Sia α reale. Sia $H(t)$ la funzione "a scalino" centrata in $t=0$. Si consideri la seguente equazione integro–differenziale

$$\begin{cases} y'+\alpha\int_0^t H(\tau)\cdot y(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{-\tau}\sin(t-\tau)d\tau \\ y(0)=0\end{cases}$$

prima domanda (14) – (7) – (*3*) Si risolva l'equazione per $\alpha\neq 1$.
Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate**

In trasformata di Laplace diventa $v(p)=\frac{p}{(p+1)(p^2+1)(p^2+\alpha)}$

Sia $\alpha>0$, $\alpha\neq1$. $y(t)=\frac{-e^{-t}}{2(1+\alpha)}+\frac{1}{2(\alpha-1)}(\cos t+\sin t)+\frac{1}{1-\alpha^2}(\cos(\sqrt{\alpha}t)+\sqrt{\alpha}\sin(\sqrt{\alpha}t))$

Sia $\alpha<0$. $y(t)=\frac{e^{-t}}{2(|\alpha|-1)}-\frac{\sin t+\cos t}{2(1+|\alpha|)}+\frac{\cosh(\sqrt{|\alpha|}t)-\sqrt{|\alpha|}\sinh(\sqrt{|\alpha|}t)}{(1-|\alpha|^2)}$

seconda domanda (14) – (7) – (*4*) Si scriva la soluzione dell'equazione per $\alpha=1$

Si scriva la soluzione nello spazio sottostante **badando bene che sia leggibile. Soluzioni illeggibili verranno penalizzate**

R.: $y(t) = -\frac{e^{-t}}{4} + \frac{\cos t}{4} + \frac{t}{4}\sin t - \frac{t}{4}\cos t$

terza domanda (2) – (1) Si dica per quali valori di α la soluzione della equazione è limitata.

R.: solo per $\alpha > 0$ e $\alpha \neq 1$.